Cadre : Soient E un ensemble et $n \in \mathbb{N}^\star$.

I Généralités sur le groupe symétrique

1) Définitions et premières propriétés

Définition 1. L'ensemble $\mathfrak{S}(E)$ des bijections de E dans E, muni de la composition des applications, est un groupe qu'on appelle groupe symétrique de E. On note simplement $\mathfrak{S}_n$ le groupe $\mathfrak{S}(\llbracket 1,n \rrbracket)$. On appelle permutation les éléments de $\mathfrak{S}(E)$.

Proposition 2. *On a une bijection entre les actions d'un groupe G sur E et les morphismes $\varphi : G \to \mathfrak{S}(E)$.*

Proposition 3. *Si E est de cardinal fini n, alors les groupes $\mathfrak{S}(E)$ est $\mathfrak{S}_n$ sont isomorphes. De plus, $|\mathfrak{S}_n| = n!$.*

Corollaire 4. *On suppose E de cardinal fini n. À toute numérotation des éléments de E correspond une bijection entre les actions d'un groupe G sur E et les morphismes $\varphi : G \to \mathfrak{S}_n$.*

Définition 5. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Exemple 6. *Soient $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ et $\rho = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ dans $\mathfrak{S}_3$. On a alors $\sigma \circ \rho = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ et $\rho \circ \sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Ainsi $\mathfrak{S}_n$ n'est en général pas abélien.*

Théorème 7 (Cayley)**.** *Tout groupe fini d'ordre n est isomorphe à un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$.*

2) Orbites et cycles

Définition 8. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

(i) Les éléments i de $\llbracket 1,n \rrbracket$ qui vérifient $\sigma(i) = i$ sont appelés points fixes de la permutation σ.

(ii) L'ensemble $\llbracket 1,n \rrbracket$ privé des points fixes de la permutation σ est appelé support de σ et noté $\mathrm{supp}(\sigma)$.

Proposition 9. *Les permutations à supports disjoints commutent.*

Définition 10. Soient $\ell \in \mathbb{N}^\star$ et $i_1, \dots, i_\ell \in \llbracket 1,n \rrbracket$. On considère la permutation $\gamma \in \mathfrak{S}_n$ définie pour $j \in \llbracket 1,n \rrbracket$ par :

$$\gamma(j) = \begin{cases} j & \text{si } j \notin \{i_1, \dots, i_\ell\} \\ i_{k+1} & \text{si } j = i_k \text{ avec } k < \ell \\ i_1 & \text{si } j = i_\ell \end{cases}$$

On dit que γ est un cycle de longueur ℓ, noté $\gamma = (i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_\ell)$. Un cycle de longueur 2 est appelé une transposition.

Exemple 11. *Avec la notation générale des permutations, le cycle $(1 \ 4 \ 2 \ 5) \in \mathfrak{S}_5$ s'écrit $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.*

Proposition 12. *Le groupe $\mathfrak{S}_n$ agit naturellement sur $\llbracket 1,n \rrbracket$ par permutations. Cette action est donnée pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \llbracket 1,n \rrbracket$ par $\sigma \cdot i = \sigma(i)$.*

Théorème 13. *Toute permutation s'écrit comme produit de cycles à supports disjoints. Ils correspondent aux orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\llbracket 1,n \rrbracket$. Cette décomposition est unique à l'ordre près.*

Exemple 14. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2)(3 \ 4) = (3 \ 4)(1 \ 2)$

Définition 15. On appelle type de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, notée $[l_1, \dots, l_m]$, la liste des cardinaux des orbites de l'action de $\langle \sigma \rangle$ sur $\llbracket 1,n \rrbracket$ dans l'ordre décroissant.

Exemple 16. *Les types possibles d'une permutation de $\mathfrak{S}_5$ sont : $[1,1,1,1,1]$, $[2,1,1,1]$, $[2,2,1]$, $[3,1,1]$, $[3,2]$, $[4,1]$ et $[5]$.*

Théorème 17. *Deux permutation de $\mathfrak{S}_n$ sont conjuguées si, et seulement si, elles ont le même type.*

3) Générateurs

Lemme 18. *Tout cycle d'ordre ℓ est produit de $\ell - 1$ transpositions. On a en fait $(i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_\ell) = (i_1 \ i_2)(i_2 \ i_3) \cdots (i_{\ell-1} \ i_\ell)$.*

Exemple 19. *Pour $\sigma = (3 \ 1 \ 5 \ 2) \in \mathfrak{S}_5$, on a $\sigma = (3 \ 1)(1 \ 5)(5 \ 2)$.*

Corollaire 20. *Les familles suivantes engendrent $\mathfrak{S}_n$:*

(i) $\{(1 \ i) \mid 1 < i \leqslant n\}$

(ii) $\{(i \ i+1) \mid 1 \leqslant i < n\}$

(iii) $\{(1 \ 2), (1 \ 2 \ \dots \ n)\}$

Remarque 21. *Quel que soit n, deux éléments suffisent à engendrer $\mathfrak{S}_n$.*

II Signature et groupe alterné

1) Signature

Définition 22. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On définit la signature de σ par :

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

Exemple 23. $\varepsilon((1\ 2)) = -1$

Proposition 24. *La signature possède les propriétés suivantes :*

(i) $\forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon(\sigma) \in \{\pm 1\}$

(ii) $\forall\, \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n,\ \varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$

(iii) Si σ est un cycle d'ordre k, alors $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{k-1}$.

2) Groupe alterné

Définition 25. Le noyau du morphisme ε est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, noté $\mathfrak{A}_n$ et appelé groupe alterné.

Proposition 26. $\mathfrak{A}_n \trianglelefteq \mathfrak{S}_n$. *De plus,* $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{A}_n \cong \{\pm 1\}$.

Lemme 27. *$\mathfrak{A}_n$ est $n-2$ fois transitif sur $[\![1, n]\!]$: si on a $a_1, \ldots, a_{n-2} \in [\![1, n]\!]$ distincts et $b_1, \ldots, b_{n-2} \in [\![1, n]\!]$ distincts, il existe $\sigma \in \mathfrak{A}_n$ tel que $\sigma(a_i) = b_i$ pour tout $i \in [\![1, n-2]\!]$.*

Proposition 28. *Les cycles d'ordre 3 sont conjugués dans $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$.*

Proposition 29. *$\mathfrak{A}_n$ est engendré par les 3-cycles de $\mathfrak{S}_n$.*

Définition 30. Un groupe non trivial est dit simple si ses sous-groupes distingués sont le groupe trivial et lui-même.

Exemple 31. *$\mathfrak{A}_4$ n'est pas simple.*

Théorème 32. *$\mathfrak{A}_n$ est simple pour $n \geqslant 5$.*

Corollaire 33. *Pour $n \geqslant 5$, le groupe dérivé de $\mathfrak{A}_n$ est $\mathfrak{A}_n$.*

Corollaire 34. *Pour $n \geqslant 5$, les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$ sont $\mathfrak{S}_n$, $\mathfrak{A}_n$ et $\{Id\}$.*

III Applications

1) Déterminants

$\mathbb{K}$ est un corps, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^\star$ et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition 35. Soient $E_1, \ldots, E_p$ et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application $f : \left| \begin{array}{ccc} E_1 \times \ldots \times E_p & \longrightarrow & F \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{array} \right.$ est dite p-linéaire si, en tout point, les p applications partielles sont linéaires. On note $f \in \mathscr{L}_p(E_1 \times \ldots \times E_p, F)$. On parle de formes p-linéaires sur E si $E_1 = \ldots = E_p = E$ et $F = \mathbb{K}$, l'ensemble des formes p-linéaires sur E est noté $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$.

Exemple 36. *Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_p \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$. Alors $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p)$ est dans $\mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$.*

Définition 37. Soit $f \in \mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$.

(i) f est dite alternée si $f(x_1, \ldots, x_p) = 0$ dès que deux vecteurs parmi les x_i sont égaux.

(ii) f est dite antisymétrique si l'échange de deux vecteurs dans la suite $(x_1, \ldots, x_p)$ donne à f des valeurs opposées.

Remarque 38. *Soit $f \in \mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$, f est antisymétrique si, et seulement si, pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ et pour tout $(x_1, \ldots, x_p) \in E^p$, on a :*

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \ldots, x_p)$$

Théorème 39. *Soit $f \in \mathscr{L}_p(E, \mathbb{K})$. Si $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, alors f est antisymétrique si, et seulement si, f est alternée.*

Théorème 40. *L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. De plus, si x_j s'écrit $(x_{1,j}, \ldots, x_{n,j})$ dans la base $\mathcal{B}$, les formes n-linéaires alternées sur E sont les applications qui sont de la forme :*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{n,\sigma(n)},\ \textit{avec}\ \lambda \in \mathbb{K}$$

Définition 41. On appelle déterminant dans la base $\mathcal{B}$ l'unique forme n-linéaire alternée sur E prenant la valeur 1 sur la base $\mathcal{B}$:

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{1,\sigma(1)} \ldots x_{n,\sigma(n)}$$

2) Groupe symétrique et géométrie

On considère E un $\mathbb{R}$-espace affine euclidien.

Définition 42. Soit X une partie de E. On note $\mathrm{Isom}(X)$ le sous-ensemble de $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ des isométries qui stabilisent X.

Définition 43. Un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ est dit régulier si tous ses côtés sont de même longueur, et si les angles entre deux côtés sont égaux.

Définition 44. On appelle groupe diédral le groupe D_n formé des isométries du polygone régulier à n cotés.

Proposition 45. *D_n est engendré par une symétrie et une rotation.*

Théorème 46. *Soit $\mathcal{T}$ un tétraèdre régulier de l'espace affine euclidien de dimension 3. Le groupe $\mathrm{Isom}(\mathcal{T})$ des isométries préservant $\mathcal{T}$ est isomorphe à $\mathfrak{S}_4$.*

Application 47. *La table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ est :*

$\mathfrak{S}_4$	Id	(ab)	$(ab)(cd)$	(abc)	$(abcd)$
1	1	1	1	1	1
ε	1	-1	1	1	-1
χ	3	1	-1	0	-1
$\varepsilon\chi$	3	-1	-1	0	1
θ	2	0	2	-1	0

Développements

- — Simplicité de $\mathfrak{A}_n$ pour $n \geqslant 5$ (29,32) [Per96]
- — Table de caractères de $\mathfrak{S}_4$ et isométries du tétraèdre (46,47) [Ser70]

Références

[Ulm12] F. Ulmer. *Théorie des groupes.* Ellipses

[Per96] D. Perrin. *Cours d'Algèbre.* Ellipses

[Gou08] X. Gourdon. *Les Maths en Tête : Analyse.* Ellipses

[CG15] P. Caldero et J. Germoni. *Histoires Hédonistes de Groupes et de Géométries 2.* Calvage et Mounet

[Ser70] J.-P. Serre. *Représentations linéaires des groupes finis.* Hermann